Experimentbeskrivning

Att väga jordklotet med två pendlar och en linjal

" InfonetSciences läsare kommer under hösten att få några tips om trevliga och intresseväckande experiment i fysik. Jag hade tänkt att höstens första månadsblad skulle handla om bestämmande av fundamentala konstanter.

I första exemplet skall det handla om området gravitation i Fysik A. Med hjälp av två pendlar – fysisk reversionspendel samt Cavendish torsionspendel – är det möjligt att bestämma g och G med hög noggrannhet. Försöken är klassiska och enkla att förstå för eleverna."

Torsionspendel

Om man dessutom bestämmer jordens radie *R* enligt Erathostenes metod från –200-talet går det att bestämma jordens massa *M* med hjälp av värdena på *g*, *G* och *R*.

Tyngdaccelerationen *g* erhålles med tre decimalers noggrannhet om man låter reversionspendeln göra 1000 svängningar. Totala tiden för detta är 2000 sekunder. Pendeln har längden 0.999 m för att ge periodtiden 2.00 s.

Under franska revolutionen fastlades grunden till SI-systemet. Detta innebar bland annat att tidsenheten 1 sekund definierades med hjälp halva periodtiden av en 1 m lång pendel. Detta är ett intressant påpekande för reversionspendeln. Tiden för 1000 svängningar bestämmes lätt med hjälp av en pulsräknare. Den håller reda på både antal svängningar och total tid.

I Newtons gravitationslag finns konstanten *G*. Den går att bestämma med hjälp av en torsionspendel (se bilden ovan). På torsionsaxeln finns en spegel som reflekterar infraröda ljuset från styrenheten. Den reflekterade ljusfläckens läge registreras av ljuskänslig IR detektor. Läget lagras i en dator och försöket sköter sig självt. Då torsionspendeln hittat sitt jämviktsläge vrider man på blykloten och avvaktar nya jämviktsläget. Genom att bestämma dämpade harmoniska oscillatorns svängningstid och avståndet mellan de två jämviktslägena går det att bestämma allmänna gravitationskonstanten *G*. Övriga erforderliga mätvärden ges av det geometriska utformandet av torsionspendeln samt blyklotens massa.

Jordens radie *R* bestämmes tillsammans med en kollega på samma meridian som din skola. Bestäm solskuggans längd av en meterstav mitt på dagen samtidigt på två orter i nord-sydlig riktning. Med trigonometri i rätvinklig triangel bestämmes solens höjd över horisonten på de två orterna. Differensen av solhöjden samt avståndet mellan orterna ger jordens radie *R*. Försöket är en klassiker och finns ofta beskrivet i matematikböcker. Välj en ort på stort avstånd i vårt avlånga land. Erathostenes använde Alexandria – Syene med avståndet cirka 800 km.

Om nu *g*, *G* och *R* är kända kan man med hjälp av Newtons gravitationslag väga jordklotet.
Studera följande uttryck:

$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$

Man erhåller 2-3 siffrors noggrannhet på jordens massa *M !*

Detaljerade uppgifter och beskrivningar om utrustning och mätningar för de olika försöken erhålles från Micro Support i Göteborg.

Gravitation - Pendlar

Isaac Newton (1642-1727) och **Robert Hooke** (1635-1703) formulerade gravitationslagen under sista halvan av 1600-talet.

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$icerade lagen i "Principia" år 1687.

De beskrev attraktionskraften *F* mellan två massor m_1 och m_2 som proportionell mot massornas produkt och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet *r* mellan massornas tyngdpunkter.

Gravitationslagens proportionalitetskonstant *G* kunde man emellertid inte bestämma experimentellt förrän långt senare. Detta berodde på att man saknade utrustning som medgav den mätnoggrannhet som krävdes.

Henry Cavendish (1731-1810) bestämde universella gravitationskonstanten *G* med hjälp av en torsionspendel år 1798.

Med hjälp av pendlar kan man bestämma två viktiga konstanter som beror av gravitationen.

Bestämning av jordens tyngdacceleration *g*.

Med en reversibel fysiskpendel kan man bestämma tyngdaccelerationen. Pendeln är reversibel då den går att hänga upp i två ändar s.k. eggar.

Avståndet mellan eggarna är l = 994 mm. Genom att låta pendeln svänga i ett plan ett stort antal gånger är det möjligt att få ett mycket bra värde på *g*.

Det räcker att bestämma periodtiden T för att kunna g då pendellängden l är känd.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Man erhåller tre gällande siffror på g om pendeln svänger 1000 perioder.

Idéhistoriskt är reversibla pendeln intressant då det var med den som man först definierade tidsenheten sekund.

Efter Franska Revolutionen 1789 ville man införa ett internationellt system för mått och vikt.

Ambitionen var att införda enheter skulle vara lätta att verifiera. Tidsenheten sekund ville man definiera som tiden från ena vändläget till andra vändläget för en plan matematisk pendel.

Bestämning av universella gravitationskonstanten *G*.

Med hjälp av en torsionspendel är det möjligt att bestämma proportionalitetskonstanten G i Newtons gravitationslag.

Mätningen bygger på att man dels mäter periodtiden T för pendeln dels bestämmer jämviktsläget för den harmoniska pendelrörelsen då två blyklot attraherar torsionspendelns små klot. Övriga mått som behöver bestämmas erhålles via den geometriska uppbyggnaden av pendeln. Dämpningen hos pendeln mätes med ljus som reflekteras i en konkav spegel på pendelns upphängningsaxel. Hela mätprocessen är datoriserad.

Bestämning av jordens radie.

Erathostenes bestämde på –200-talet jordens radie R på ett mycket omtalat sätt. Genom att samtidigt bestämma skillnaden mellan solstrålarnas vinkel mot vertikalplanet i Alexandria och den sydligare orten Syene kunde jordradien bestämmas om avståndet mellan Alexandria och Syene var bekant.

Denna metod är fortfarande aktuell. Två skolor på samma meridian mäter vinklarna samtidigt och om avståndet mellan skolorna är känt kan jordens radie R bestämmas.

Bestämning av jordens massa.

Då universella gravitationskonstanten G samt jordens radie R är bestämd går det att beräkna jordens massa M om tyngdaccelerationen g är uppmätt.

Med de två pendelexperimenten samt Erathostenes mätmetod gör det alltså möjligt att väga jorden.
Sambandet:

$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$

ger jorden massan M !

Detaljerade beskrivningar av experimenten kan erhållas av:

Ingvar Pehrson
Vuxenutbildningen Kärnan
Västra Allén 7
254 51 HELSINGBORG
Tel:042-10 46 83
Fax:042-10 46 60

e-mail: ingvar.pehrson@komvux.helsingborg.se

Gravitation - Pendlar

Teori

Med två pendlar som dels svänger i ett vertikalplan – fysisk pendel – och dels svänger i ett horisontalplan – torsionspendel – är det möjligt att bestämma jordens massa om man vet jordens radie.

Vi utför fyra experiment.

A. *Bestämning av tyngdaccelerationen g med hjälp av fysisk reversionspendel*

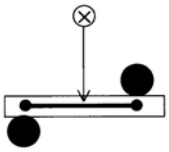
Pendeln har två eggar och därför man kan göra mätningen på två håll.
Pendelns längd l mellan upphängningspunkten och tyngdpunkten är
l = 0.994 m.
Genom att låta pendeln göra många svängningar (1000 st) erhåller man en stor noggrannhet på periodtiden T. Tyngdaccelerationen g erhålles med tre säkra siffor.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

B.Bestämning av universella gravitationskonstanten G med hjälp av torsionspendel

Blykloten kan placeras så att pendeln får två jämviktslägen. Med datorstyrd mätning kan svängningens amplitud s bestämmas som funktion av tiden t.
Differensen mellan de två jämviktslägena kallas Δs.
L är avståndet mellan pendelns spegel och ljusdetektorn.
Ljusstrålen reflekteras på pendeln och reflekterande stråle registreras med hjälp av

fototransistorer.



Blykloten känner gravitationskrafter

$$F_G = G\frac{mM}{r^2}$$

Vridmomentet orsakad av blykloten blir

$$M_G = \frac{2GmM}{r^2} \cdot d$$

Det är två klot med hävarmen *d*.

Vridmomentet orsakad av torsionen blir

$$M_T = D \cdot \alpha$$

α är torsionspendelns vridande vinkel. *D* är trådens motstånd mot vridning.

Torsionspendelns periodtid *T* erhålles av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad \Leftrightarrow D = \frac{4\pi^2 J}{T^2}$$

J är tröghetsmomentet hos en blykula $J = 2md^2$

Vid vändlägena är de två vridmomenten lika $M_G = M_T$

$$\Leftrightarrow \frac{2GmMd}{r^2} = \frac{4\pi^2 J}{T^2} \cdot \alpha = \frac{4\pi^2 2md^2}{T^2} \cdot \alpha$$

$$\Leftrightarrow G = \frac{4\pi^2 dr^2}{MT^2} \cdot \alpha \qquad \alpha = \frac{\Delta s}{4L}$$

α är liten och reflekterad stråle vrides dubbelt så många grader som pendeln.

$$\Leftrightarrow G = \frac{\pi^2 dr^2 \Delta s}{MT^2 L}$$

d = 0.050 m (hävarm) *r* = 0.048 m (klotavstånd)

M = 1.508 kg (blyklot) *L* = 0.700 m (detektoravs)

Genom att bestämma pendelns periodtid *T* samt avläsa differensen Δ *s*

mellan de två olika jämviktslägena går det att bestämma universella gravitationskonstanten *G* ! !

C. ***Bestämning av jordens radie R.***

Jordens radie bestämmes med Erathostenes metod. Vinkeldifferensen $\Delta\,\alpha$ beräknas för solstrålarna för två orter på samma meridian och vid samma klockslag. Avståndet mellan orterna *d* avläses på en karta.

$$R = \frac{180}{\Delta\alpha\cdot\pi}\cdot d$$

D. ***Bestämning av jordens massa M.***

Det är nu klart med beräkningen av jordens massa.

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \Leftrightarrow M = \frac{g}{G}\cdot R^2$$

Gravitation-Pendlar

Resultat av mätningar

A Bestämning av tyngdaccelerationen *g*

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

l = 0.994 m

1000 T = 1999.8 s *T = 1.9998 s*

g = 9.81 ms^{-2} **(g = 9.816 ms^{-2})**

B Bestämning av allmänna gravitationskonstanten *G*

$$G = \frac{\pi^2 d r^2 \Delta s}{MT^2 L}$$

d = 0.050 m *r = 0.048 m*

M = 1.508 kg *L = 0.700 m*

Ur mätgraf erhålles: *T = 628.8 s* *Δ s = 23.5 mm*

G = 6.40· 10^{-11} Nm^{2}kg^{-2} **(G = 6.67· 10^{-11} Nm^{2}kg^{-2})**

C <u>Bestämning av jordens radie *R*</u>

Skuggan av en meterstav i Helsingborg den 5 februari 1999 är 3.15 m samtidigt som skuggan är 5.40 m i Östersund. Vinkeldifferensen mellan städerna utefter meridianen är $\Delta\,\alpha = 7^{o}\,7'$. Nord-syd avståndet är d = 790 km på en karta mellan städerna.

$$R = \frac{180}{\Delta\alpha \cdot \pi} \cdot d$$

***R* = 6360 km** **(*R* = 6370 km)**

D <u>Beräkning av jordens massa M</u>

$$M = \frac{g}{G} \cdot R^2$$

$M = 6.20 \cdot 10^{24}$ kg **($M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg)**